NOTA DE DIVULGACIÓN: EL MAYOR FACTOR PRIMO DEL SUCESOR DE UN CUADRADO.

FACULTAD DE MATEMÁTICAS DE LA PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

1. Hechos clave

- En los años '30, los matemáticos Sarvadaman Chowla [1] y Kurt Mahler [2] de forma independiente dieron con una fórmula que controlaba el tamaño de los factores primos de los sucesores de los cuadrados.
- Desde entonces el desafío era determinar si esa fórmula era lo óptimo, o bien mejorarla. Este problema no tuvo avances significativos en casi un siglo.
- En diciembre de 2023, un académico de la Facultad de Matemáticas UC, el Dr. Héctor Pastén Vásquez dio con una respuesta: la fórmula de Mahler y Chowla no era la óptima y encontró una significativamente mejor.
- Luego de un proceso de revisión por pares anónimos, el teorema de Pastén fue publicado en la prestigiosa revista *Inventiones Mathematicae* [4] en febrero de 2024.
- El artículo de Pastén también incluye algunos avances parciales sobre la famosa conjetura ABC que data de los años '80. La conjetura ABC sigue sin solución.

2. Los números primos

Así como la unidad básica de la materia son los átomos, y la unidad básica de la vida son las células, ocurre que los números enteros también tienen una unidad básica que los conforma: los *números primos*. ¡Todos los enteros mayores que 1 están hechos de números primos! Esto se puede ver al tomar un entero y dividirlo de forma exacta todas las veces que sea posible. Por ejemplo:

$$50 = 10 \times 5$$

y ahora separando el 10 como 2×5 se obtiene

$$50 = 2 \times 5 \times 5.$$

En este punto ya no se puede seguir dividiendo de forma exacta así que 2 y 5 son los factores primos de 50, y la expresión anterior es su factorización en primos.

Dicho de otro modo, es como si los enteros mayores que 1 (a saber, $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$) fueran estructuras sólidas hechas de bloques indivisibles, y estos bloques justamente son los números primos.

Números muy grandes pueden tener sus factores primos muy pequeños, por ejemplo

$$1024 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

así que el único factor primo de 1024 es 2. Debido a esto, el comportamiento de los factores primos de los enteros es muy difícil de predecir, es bastante errático.

Cabe destacar que hoy en día los números primos han tomado un papel fundamental en las tecnologías de comunicaciones eficientes y seguras ¡este fascinante tema da para largo!

Date: 16 de abril de 2024.

3. El problema de Mahler y Chowla

Como mencionamos antes, los factores primos de números muy grandes pueden ser muy pequeños. Sin embargo, Mahler y Chowla descubrieron en los años '30 una secuencia donde esto no pasa: más precisamente, una secuencia muy sencilla donde los números grandes efectivamente tienen algún factor primo grande.

Para entender esta secuencia debemos recordar lo que es un número *cuadrado*. Ellos son los números que se obtienen multiplicando un entero por sí mismo. Los primeros son:

$$1 \times 1 = 1, \quad 2 \times 2 = 4, \quad 3 \times 3 = 9, \quad 4 \times 4 = 16, \quad 5 \times 5 = 25, \ldots$$

La secuencia que Mahler y Chowla estudiaron es la secuencia de los *sucesores* de los cuadrados, vale decir, le sumamos 1 a los números anteriores:

$$2 = 1 + 1, \quad 5 = 4 + 1, \quad 10 = 9 + 1, \quad 17 = 16 + 1, \quad 26 = 25 + 1, \ldots$$

Mahler y Chowla descubrieron que estos números tienen al menos un factor primo que no es tan chico (aunque igual puede ser relativamente pequeño). La siguiente tabla resume la situación para los 5 primeros ejemplos:

Cuadrado	Cuadrado + 1	Factorización	El mayor factor primo
1	2	2	2
4	5	5	5
9	10	2×5	5
16	17	17	17
25	26	2×13	13

La Teorema de Mahler y Chowla (que data de 1933) es el siguiente:

Teorema 1 (Mahler en 1933 y Chowla en 1934)**.** *El mayor factor primo de $n^2 + 1$ es al menos de tamaño*

$$\log \log n.$$

La expresión $\log \log n$ es un *doble* logaritmo y crece muy lento, pero efectivamente crece al infinito. El desafío que quedó pendiente desde los años '30 era mejorar esta estimación de forma significativa, o en su defecto, determinar si el teorema de Mahler y Chowla era esencialmente inmejorable.

4. El nuevo teorema

Lo que el Profesor Pastén descubrió es que el Teorema de Mahler y Chowla *no* era lo óptimo, y demostró un resultado mucho más fuerte:

Teorema 2 (Pastén, 2024)**.** *El mayor factor primo de $n^2 + 1$ es al menos de tamaño*

$$\frac{(\log \log n)^2}{\log \log \log n}.$$

Esencialmente, esto es el *cuadrado* de la estimación de Chowla y Mahler.

A pesar que el *enunciado* del problema solo usa matemática elemental (primos, cuadrados y factorizaciones), las matemáticas involucradas en la *solución* dada por el Profesor Pastén son bastante sofisticadas: provienen de la teoría de números trascendentales, la teoría de curvas elípticas, y una teoría relacionada a las curvas de Shimura que el mismo Profesor Pastén desarrolló en investigaciones a lo largo de varios años [3].

Referencias

[1] S. Chowla, *The Greatest Prime Factor of* $x^2 + 1$. J. London Math. Soc. 10 (1935), no. 2, 117-120.

[2] K. Mahler, *Über den grössten Primteiler der Polynome* $x^2 \mp 1$. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. B 41 (1), (1933), 3-8.

[3] H. Pasten, *Shimura curves and the abc conjecture.* J. Number Theory 254 (2024), 214-335.

[4] H. Pasten, *The largest prime factor of* n^2+1 *and improvements on subexponential ABC.* Inventiones Mathematicae. 236 (2024), no. 1, 373-385.

Email address, Matemáticas UC: `comunicaciones@mat.uc.cl`